



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Temmuz-Ağustos 2017

Soru:

Her birinin içinde çeşitli renklerden bir veya birkaç top bulunan 2017 torbayı k kutuya, her kutu

- kutudaki tüm torbalar aynı renkte top içerecek
- kutudaki her torba, bu kutudaki diğer torbalardan hiçbirinin içermediği renkte bir top içerecek

koşullarının en az birini sağlayacak şekilde yerleştirmek istiyoruz. Torbalardaki topların sayıları ve renkleri ne olursa olsun, böyle bir yerleştirmeyi olanaklı kılan en küçük k sayısını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $k = 63$.

İlk önce $k \geq 63$ olduğunu gösterelim. 63 torbanın her birinin içinde 1 renge boyalı bir top, 62 torbanın her birinin içinde 2 renge boyalı bir top, ..., 1 torbanın içinde 63 renge boyalı bir top olsun. Bu 2016 torbanın 62 kutuya yerleştirilemeyeceğini gösterelim. İçinde l renkli top bulunan torbaya l renkli torba diyelim. Kurallara göre bir kutuda iki tane l renkli torba bulunuyorsa bu kutudaki tüm torbalar l renkli olacaktır. Sadece aynı renkli torbalar içeren kutuya tek renkli kutu diyelim. Bu 2016 torbanın kutulara herhangi bir dağılımını inceleyelim. Bu dağılımda tek renkli kutuların sayısı s olsun. O zaman bir t rengi için en az $63 - s$ tane t renkli torba bulunacaktır. Bu $63 - s$ torba zorunlu olarak farklı kutularda bulunacak ve sonuç olarak en az $s + 63 - s = 63$ kutu gerekecektir.

Şimdi 63 kutunun yeterli olacağını gösterelim.

Lemma. Ortak renkli top içeren torba sayısı en fazla m olan her torba obeği en fazla m kutuya yerleştirilebilir.

İspat: Herhangi bir l_1 rengi seçelim. $l_1 \leq m$ olduğundan l_1 renkli top içeren tüm torbaları farklı kutulara yerleştirebiliriz. Herhangi bir l_2 rengi seçelim. $l_2 \leq m$ olduğundan kalan torbalardan l_2 renkli top içeren tüm torbaları farklı kutulara yerleştirebiliriz. Her defa yeni bir renk seçerek benzer şekilde tüm torbaları m kutuya yerleştirebiliriz. O zaman her kutudaki her torba, bu kutudaki diğer torbalardan hiçbirinin içermediği renkte bir top içermiş olacak. İspat tamamlanmıştır.

İlk önce en çok sayıda torbada bulunan bir n_1 rengi seçelim. Bu sayı 63 den fazla değilse lemmayı kullanarak torbaları 63 kutuya yerleştirebiliriz. Aksi takdirde bu torbaları (en az 64 torba) aynı kutuya yerleştirelim ve kalan torbalar öbeğinde en çok sayıda torbada bulunan bir n_2 rengi seçelim. Bu sayı 62 den fazla değilse lemmayı kullanarak kalan torbaları 62 kutuya yerleştirebiliriz. Aksi takdirde bu torbaları (en az 63 torba) yeni bir kutuya yerleştirelim ve benzer şekilde devam edelim. $64 + 63 + \dots + 1 = 2080 > 2017$ olduğundan bir p bir pozitif tam sayısı için $p - 1$ adım sonucunda en fazla $64 - p$ torbada n_p renkli top bulunacaktır. Lemmayı kullanılarak bu torbaları en fazla $64 - p$ yeni kutuya yerleştirebiliriz. İlk $p - 1$ adımda $p - 1$ kutu kullanıldığından toplamda en fazla 63 kutu yeterli olacaktır.