Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mayıs 2017

Soru:

m, n pozitif tam sayılar ve p asal sayı olmak üzere,

$$(m^3 + n)(n^3 + m) = p^3$$

denklemini sağlayan tüm (m, n, p) üçlülerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $(m, n, p) = (2, 1, 3), (1, 2, 3)$.

$m = n$ ise $n^2(n^2 + 1) = p^3$. p asal ve $ebob(n^2, n^2 + 1) = 1$ olduğundan $n = 1$ ve çözüm gelmiyor.

$m > n \geq 1$ olsun. $n^3 + m \geq 2$ olduğundan $m^3 + n = p^2 (\dagger)$, $n^3 + m = p (\ddagger)$.

$n = 1$ ise $p^2 = (m^3 + 1) = (m + 1)(m^2 - m + 1)$ ve $m + 1 = p$. O zaman $m^2 - m + 1 = p = m + 1$, $m = 2$ ve $m = 2$, $n = 1$, $p = 3$ çözümü elde ediliyor.

$n > 1$ ise $p = n^3 + m > m + n$ ve buradan $p \nmid m + n$ ve $p \nmid m - n$. $(\dagger)$ ve $(\ddagger)$ ifadelerini toplam ve farkından

$$(m + n)(m^2 - mn + n^2 + 1) = p(p + 1) \qquad (m - n)(m^2 + mn + n^2 - 1) = p(p - 1).$$

$p \nmid m + n$ ve $p \nmid m - n$ olduğundan $p \mid m^2 - mn + n^2 + 1$ ve $p \mid m^2 + mn + n^2 - 1$. Demek ki $p \mid (m^2 + mn + n^2 - 1) - (m^2 - mn + n^2 + 1) = 2(mn - 1)$. $p = 2$ ise $m = n = 1$, çözüm değildir. O zaman $p \mid mn - 1$ ve $p \leq mn - 1$. Şimdi $n^3 + n < n^3 + m = p \leq mn - 1 < mn$ olduğundan $n^3 + n < mn$ ve $n^2 + 1 < m$. Demek ki $n^2 < m$. $p \leq mn - 1$ olduğundan $p^2 \leq m^2n^2 - 2mn + 1$. O zaman $m^3 + n = p^2 \leq m^2n^2 - 2mn + 1$. $n^2 < m$ olduğundan $m^2n^2 - 2mn + 1 < m^3 - 2mn + 1$. O zaman $m^3 + n < m^3 - 2mn + 1$ ve sonuç olarak $2mn + n < 1$ çelişkisini elde ediyoruz.

$n > m \geq 1$ durumunda benzer şekilde sadece $n = 2$, $m = 1$, $p = 3$ çözümü geliyor.