Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2015

Soru: $a^2+b^2+c^2+2abc \leq 1$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+2(a+b+c)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: Eşitsizliği ispatlamak için $\frac{1}{a}-2b \geq \frac{c}{a}$, $\frac{1}{b}-2c \geq \frac{a}{b}$ ve $\frac{1}{c}-2a \geq \frac{b}{c}$ olduğunu göstereceğiz. Benzerlikten dolayı

$$\frac{1}{a}-2b \geq \frac{c}{a} \qquad (\dagger)$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterlidir. $(a-b)^2 \geq 0$ olduğundan

$$2ab+c^2+2abc \leq a^2+b^2+c^2+2abc \leq 1$$

elde ediyoruz. Sonuç olarak

$$(c+1)(c+2ab-1) \leq 0.$$

$c>0$ olduğundan $c+2ab \leq 1$. İspat tamamlandı.