Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2015

Soru:

Bir t gerçel sayısı için $at^2+bt+c=0$ olacak şekilde $1 \leq |a|, |b|, |c| \leq 10$ koşulunu sağlayan a, b, c tam sayıları bulunabiliyorsa t sayısına 10-*karesel sayı* diyelim. Buna göre

$$\left(n-\frac{1}{3},\, n\right) \text{ ve } \left(n,\, n+\frac{1}{3}\right)$$

aralıklarının en az birinde 10-karesel sayı bulunmamasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

Çözüm: Koşulları sağlayan tam sayı s olsun. $s = 11$ olduğunu gösterelim. $x_1 = 0.75$ ve $x_2 = 1.25$ sayılarının sırasıyla $P(x) = 4x^2 + x - 3$ ve $Q(x) = 4x^2 - x - 5$, polinomlarının kökleri olduğundan $s \neq 1$. Şimdi $s > 10$ olduğunu gösterelim. $3 \leq n \leq 10$ olsun. $P(x) = x^2 + (1-n)x - n + 1$ polinomunun kökü olan

$$x_1 = \frac{n-1+\sqrt{n^2+2n-3}}{2}$$

$x_1 < n$ eşitsizliğini sağlıyor. Diğer taraftan

$$x_1 = \frac{n-1+\sqrt{n^2+2n-3}}{2} > n - \frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{7}{3}.$$

Demek ki $n - \frac{1}{3} < x_1 < n$.

$2 \leq n \leq 9$ olsun. $Q(x) = x^2 + (1-n)x - n - 1$ polinomunun kökü olan

$$x_2 = \frac{n-1+\sqrt{n^2+2n+5}}{2}$$

$x_2 > 2$ eşitsizliğini sağlıyor. Diğer taraftan

$$x_2 = \frac{n-1+\sqrt{n^2+2n+5}}{2} < n + \frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{5}{3}.$$

Demek ki $n < x_2 < n + 1/3$.

Son olarak $4x^2 - 3x - 7$ polinomunun $(2 - 1/3, 2)$ aralığında $x_1 = \frac{7}{4}$ kökü ve $x^2 - 10x - 1$ polinomunun $(10, 10 + 1/3)$ aralığında $x_1 = 5 + \sqrt{26}$ kökü bulunduğundan $s \geq 11$ elde ediyoruz.

$s = 11$ olduğunu göstermek için $(11, 11 + 1/3)$ aralığında herhangi 10-karesel sayı bulunmadığını kanıtlayalım. x_1, x_2 sayıları $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomunun kökleri olmak üzere, Vieta teoreminden

$$x_1 + x_2 = -b/a \in [-10, 10] \quad \text{ve} \quad x_1 x_2 = c/a \in [-10, 10].$$

$11 < x_1 < 11 + 1/3$ olursa

$$-\frac{10}{11+1/3} < -\frac{10}{x_1} \leq x_2$$

elde ederiz. Demek ki

$$10 < -\frac{10}{11+1/3} + 11 < x_1 + x_2 \quad \text{ve bu da} \quad x_1 + x_2 \in [-10, 10] \quad \text{ile}$$

çelişiyor. Çözüm tamamlandı.