Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2015

Soru:

Düzlemde koordinatları $S = \{0, 1, \ldots, 99\}$ kümesinde bulunan noktaların kırmızı ve beyaz renklere, her $i, j \in S$ için $(i, j), (i+1, j), (i, j+1)$ ve $(i+1, j+1)$ $(99+1 = 0$ kabul edilmektedir) noktalarından en az biri kırmızı olacak şekilde boyanmasına *kırmızımsı boyama* diyelim. Herhangi bir kırmızı noktası beyaza çevrildiğinde kırmızımsı olma özelliğini kaybeden bir boyamada en fazla kaç kırmızı nokta olabilir?

Çözüm: Cevap: 5000.

$i + j = 0, 1 \pmod 4$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları kırmızı olup, $i + j = 2, 3 \pmod 4$ koşulunu sağlayan (i, j) noktaları ise beyaz olan boyama açık olarak bir kırmızımsı boyamadır ve tam olarak $\frac{100^2}{2} = 5000$ kırmızı nokta içeriyor. 5000 den fazla kırmızı nokta içeren bir kırmızımsı boyama olduğunu varsayalım. Bu boyamadaki her kırmızı nokta bir $(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1)$ dörtlüsünün tek kırmızı noktasıdır. Bu dört nokta arasında aralarındaki uzaklık 1 olan ve farklı renklere boyalı iki nokta çifti bulunuyor. Her nokta çiftindeki noktaları siyah bir doğru parçasiyla birleştirelim. Bu işlemi her kırmızı nokta için yaparsak tam olarak $5001 \cdot 2 = 10002$ siyah doğru parçası elde ederiz. Varsayıma göre beyaz nokta sayısı 5000 den az olduğundan bir (l, m) beyaz noktasından en az üç siyah doğru parçası çıkıyor. Genelliği bozmadan bu siyah doğru parçalarının (l, m) noktasını $(l-1, m), (l+1, m)$ ve $(l, m-1)$ kırmızı noktaları ile birleştirdiğini varsayalım. Fakat $(l - 1, m)$ ve $(l + 1, m)$ noktaları kırmızı olduğundan (l, m) beyaz noktası ve $(l, m - 1)$ kırmızı noktası arasında siyah doğru parçası olamaz! Demek ki 5000 den fazla kırmızı nokta içeren bir kırmızımsı boyama yoktur. İspat tamamlandı.