Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Haziran 2015

Soru:

$|a^c - b!| \leq b$ koşulunu sağlayan tüm (a, b, c) pozitif tam sayı üçlüleri için

$\dfrac{a}{b}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm: Cevap: $\dfrac{1}{2}$.

Tüm $(a, b, c) = (1, 2, c)$ değerleri sorudaki seşitsizlik koşulunu sağlıyor. Demek ki $\dfrac{a}{b}$ $\dfrac{1}{2}$ değerini alıyor. Şimdi $b \geq 2a$ için başka durumun olmadığını götereceğiz. $t = |a^c - n!|$ olsun. $t > 0$ ise $1 = \left|\dfrac{a^c}{t} - \dfrac{b!}{t}\right|$. $t \leq b$ olduğundan $\dfrac{b!}{t}$ tam sayıdır ve demek ki $\dfrac{a^c}{t}$ de tam sayıolma zorundadır. Ayr ca, $2a \leq b \Rightarrow a, 2a \in \{1, 2, \ldots, b\}$. a ve $2a$ sayılarından en az biri t den farklıdır ve $\dfrac{b!}{t}$ çarpımında sadeleşmiyor. O zaman $a \mid \dfrac{b!}{t}$. Şimdi $\dfrac{b!}{t}$ ve $\dfrac{a^c}{t}$ sayılarının farkı 1 olduğundan $\gcd\left(a, \dfrac{a^c}{t}\right) = 1$ ve sonuç olarak $t = a^c$. Demek ki iki durum inceleyeceğiz: $|a^c - b!| = 0$ ve $|a^c - b!| = a^c$. Bu durumlarda

$$b! = a^c \text{ ve } b! = 2a^c$$

elde ediyoruz. Her iki durumda $2a - 1 \in \{1, 2, \ldots, b\}$ ve demek ki $(2a - 1) \mid b! \mid 2a^c$. Şimdi

$$\gcd(2a - 1, 2a^c) = 1, \implies 2a - 1 = 1 \text{ ve } a = 1.$$

Son olarak $a = 1$, $b! - b \leq 1 \Rightarrow b \leq 2$. Demek ki $b \geq 2a$ durumunda tek çözüm $(a, b) = (1, 2)$.