



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2015

Soru:

Her adımda, $1 \leq k, l \leq 100$ ve a_k çift olmak üzere k, l indislerini seçip $(a_1, \dots, a_k, \dots, a_l, \dots, a_{100})$ yuzlüsünü $(a_1, \dots, \frac{a_k}{2}, \dots, a_l + \frac{a_k}{2}, \dots, a_{100})$ yuzlüsüne dönüştürebiliyoruz. $(1, 2, \dots, 100)$ yuzlüsünün bir (a_1, \dots, a_{100}) permütasyonu, $(1, 2, \dots, 100)$ yuzlüsünden başlayarak, sonlu adım sonucunda elde edilebiliyorsa, bu permütasyona *iyi* permütasyon diyelim. $(1, 2, \dots, 100)$ yuzlüsünün iyi permütasyonlarının sayısını belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: $100!$ Tümevarım kullanarak her pozitif n için $(1, 2, \dots, n)$ nin tüm permütasyonlarının elde edilebileceğini ispatlayalım.

1. $n = 2$ durumu açıktır.
2. Varsayım $n = r - 1$ için doğru olsun. Herhangi (a_1, a_2, \dots, a_r) permütasyonunu elde edebileceğimizi gösterelim. $s, a_s = r$ olan indis olsun. İlk önce r sayısını gereken pozisyona yerleştirmek için

$$(r - s + 1, r - s + 2, \dots, r - 2, r - 1, r, 1, 2, \dots, r - s - 1, r - s) \quad (1)$$

permütasyonunu elde edeceğiz. a_l nin yarısını a_{l+1} ye $(a_{r+1} \equiv a_1)$ ekleme adımı $T(l)$ olsun:

$$(a_1, \dots, a_{l-1}, a_l, a_{l+1}, \dots, a_r) \rightarrow (a_1, \dots, a_{l-1}, \frac{a_l}{2}, a_{l+1} + \frac{a_l}{2}, \dots, a_r)$$

$T(2), T(3), \dots, T(r)$ adımlar serisi sonucunda $(1, 2, \dots, r)$ durumundan $(r, 1, 2, \dots, r - 1)$ durumuna ulaşıyoruz. Benzer şekilde $T(3), T(4), \dots, T(r), T(1)$ serisi sonucunda $(r, 1, 2, \dots, r - 1)$ durumundan $(r - 1, r, 1, 2, \dots, r - 2)$ durumuna ve $T(4), T(5), \dots, T(r), T(1), T(2)$ serisi sonucunda $(r - 1, r, 1, 2, \dots, r - 2)$ durumundan $(r - 2, r - 1, r, 1, 2, \dots, r - 3)$ durumuna ulaşıyoruz. Dolayısıyla, s seri sinucunda (1) durumuna varıyoruz. Demek ki r sayısı gereken pozisyona yerleştirilmiştir ve kalan $\{1, 2, \dots, r - 1\}$ sayılarını da tümevarım varsayımına dayanarak gereken pozisyonlara yerleştirerek (a_1, a_2, \dots, a_r) permütasyonunu elde edebiliriz.