



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ocak 2015

Soru:

Uzayda herhangi üçü aynı doğru ve herhangi dördü aynı düzlem üzerinde olmayan 2015 nokta var ve her nokta ikilisi bir doğru parçası ile birleştirilmiştir. Bu $\binom{2015}{2}$ doğru parçasının her birinin k renkten birine, her renk en az bir kez kullanılarak boyanmasına k -boyama diyelim. Her k -boyama kenarları farklı renkli bir üçgen içeriyorsa k -nın alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm: Cevap: $k = 2015$.

$n \geq 3$ nokta için cevabın $k = n$ olduğunu ispatlayacağız.

İlk önce $k \geq n$ olduğunu gösterelim. Bunun için, tümevarımla $k \leq n - 1$ ise $\binom{n}{2}$ doğru parçasını farklı renkli herhangi bir üçgen oluşmayacak şekilde boyanabileceğini ispatlayalım. Renkler c_1, c_2, \dots, c_k olsun. $k = l < n - 1$ ise $c_{l+1} = c_l, \dots, c_{n-1} = c_l$ kabul ederek toplamda $n - 1$ renk olduğunu varsayabiliriz. $n = 3$ ise iki kenarı c_1 ve bir kenarı c_2 ile boyayabiliriz. $C(m)$, $n = m$ için istenilen boyama olsun. $n = m + 1$ durumunda $C(m)$ yi alalım ve yeni noktayı kalan m noktayla birleştiren tüm kenarları c_m rengiyle boyayalım. Bu durumda kenarları farklı renkli herhangi bir üçgenin oluşmayacağı açıktır.

Şimdi $k \leq n$ olduğunu gösterelim. Bunun için tümevarımla $k = n$ durumunda $\binom{n}{2}$ doğru parçasının n renkle her boyamasının, kenarları farklı renkli bir üçgen içerdiğini ispatlayacağız. $n = 3$ durumu açıktır. Varsayım n için doğru olsun ve $n + 1$ durumunu inceleyelim. $n + 1$ noktanın herhangi n tanesini alalım. Bu noktaları birleştiren $\binom{n}{2}$ doğru parçası toplamda n renkle boyanmışsa tümevarım varsayına göre istenilen üçgen bulunur. Aksi durumda sonuncu noktayı bu n noktayla birleştiren n tane doğru parçasının en az ikisi birbirinden farklı iki yeni renkle boyanma zorundadır ve istenilen üçgen bu iki kenarı içeren üçgendir. İspat tamamlandı.