



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Kasım 2014

Soru:

$i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, birbirinden farklı $P_i(x) = x^2 + b_i x + c_i$ ikinci dereceli polinomları verilmiştir. Her $1 \leq i < j \leq n$ ikilisi için $P_{i,j}(x) = P_i(x) + P_j(x)$ polinomunun gerçel kök sayısı bire eşitse, n en fazla kaç olabilir?

Çözüm: Cevap: $n = 3$.

$P_1(x) = x^2 - 4$, $P_2(x) = x^2 - 4x + 6$ ve $P_3(x) = x^2 - 8x + 12$ polinomları koşulları sağlıyor:
 $P_1 + P_1 = 2(x - 1)^2$, $P_1 + P_3 = 2(x - 2)^2$, $P_2 + P_3 = 2(x - 3)^2$.

P_1, P_2, P_3, P_4 , koşulları sağlayan dört polinom olsun. O zaman P_i ve P_j polinomlarının ortak kökleri t_{ij} olmak üzere, $P_1 + P_2 = 2(x - t_{12})^2$, $P_3 + P_4 = 2(x - t_{34})^2$, $P_1 + P_3 = 2(x - t_{13})^2$, $P_2 + P_4 = 2(x - t_{24})^2$ elde ediyoruz. Buradan $Q = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ için iki farklı ifade ediniyoruz: $Q = 2(x - t_{12})^2 + 2(x - t_{34})^2$ ve $Q = 2(x - t_{13})^2 + 2(x - t_{24})^2$. Her iki ifadedeki x in katsayıları birbirine eşit olacaktır: $t_{12} + t_{34} = t_{13} + t_{24} = 2t$. Benzer şekilde her iki ifadedeki sabit katsayılar birbirine eşit olacaktır: $t_{12}^2 + t_{34}^2 = t_{13}^2 + t_{24}^2$. $t_{12} \leq t_{34}$ ve $t_{13} \leq t_{24}$ olsun (diğer durumlarda çözüm değişmiyor). Demek ki $\Delta_1 \geq 0$ ve $\Delta_2 \geq 0$ olmak üzere, $t_{12} = t - \Delta_1$, $t_{34} = t + \Delta_1$, $t_{13} = t - \Delta_2$, $t_{24} = t + \Delta_2$. O zaman $t_{12}^2 + t_{34}^2 = t_{13}^2 + t_{24}^2$ eşitliğinden $\Delta_1 = \Delta_2$ ve $t_{12} = t_{13}$ elde ediyoruz. Sonuç olarak $P_1 + P_2 = P_1 + P_3$ ve $P_2 = P_3$. Demek ki $n < 4$ olma zorundadır. İspat tamamlandı.