Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2014

Soru:

n az bir pozitif p tam sayısı için

• her x_n en fazla p tane 2 nin kuvvetinin toplamına eşit olan ($x_n = 2^{l_1}+2^{l_2}+\cdots+2^{l_k}$; $k \leq p$)

ve

•• her x_n elemanı 10^n ile bölünen

bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif tam sayılar dizisinin bulunabileceğini gösteriniz. Bu p sayısının alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm:

Cevap: $p = 2$. 2 nin kuvvetleri 10 un katı olmaduğından $p = 1$ olamaz. Şimdi

$$x_n = 2^n + 2^{2\cdot 5^{n-1}+n}; n = 1, 2, \ldots$$

dizisinin koşulları sağladığını gösterelim. $x_n = 2^n(2^{2\cdot 5^{n-1}} + 1)$ olduğundan tümevarımla 5^n nin $2^{2\cdot 5^{n-1}} + 1$ ifadesini böldüğünü ispatlayacağız.

○ $n = 1$: 5^1 sayısı $2^2 + 1$ sayısını bölüyor.

○○ 5^k nın $2^{2\cdot 5^{k-1}} + 1 = 4^{5^{k-1}} + 1$ sayısını böldüğünü kabul edelim ve 5^{k+1} in $2^{2\cdot 5^k} + 1$ sayısını böldüğünü gösterelim. $t = 4^{5^{k-1}}$ olsun. O zaman $2^{2\cdot 5^k} + 1 = t^5 + 1 = (t+1)(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1)$. Varsayıma göre 5^k sayısı $t+1$ sayısını bölüyor ve ispatı tamamlamak için $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ in 5'e bölündüğünü göstermemiz gerekiyor. $t + 1$ 5'e bölünüyor: $t = 5s - 1$. O zaman mod 5 te $t^4 = t^2 = 1$ ve $t^3 = t = -1$. Sonuç olarak $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ 5'e bölünüyor.

İspat tamamlandı.