Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Haziran 2014

Soru:

$(a^3+b)(b^3+a)=2^c$ eşitliğini sağlayan tüm (a,b,c) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm:

a ve b sayılarının biri çift diğeri tek olamaz. Her iki sayı çift olsun: $a=2^l(2a_1+1)$ ve $b=2^m(2b_1+1)$, $l\le m$. Bu durumda denklemin her iki tarafını 2^l ile bölersek sol taraf tek sayı oluyor, çelişki. Demek ki her iki sayı tektir. $a=b$ ise tek çözüm $a=b=1$. $a>b$ olsun. O zaman $a^3+b>b^3+a$ ve her iki sayı 2'nin kuvveti olduğundan b^3+a sayısı a^3+b sayısını bölme zorundadır. b^3+a sayısı b^9+a^3 sayısını bölüyor, dolayısıyla b^3+a bu sayıların farkı olan $b^9-b=b(b^2-1)(b^2+1)(b^4+1)$ sayısını da bölüyor. b^3+a sayısı 2'nin kuvvetidir ve $b^2+1\ge 2$, $(b^4+1)\ge 2$ olduğundan b^3+a sayısı $4(b^2-1)$ sayısını bölüyor ve dolayısıyla $b^3<4(b^2-1)$. O zaman $b\le 3$ elde ediyoruz. $b=1$ ise a^3+1 ve $a+1$ sayıları 2'nin kuvveti olduğundan $\frac{a^3+1}{a+1}=a^2-a+1$ sayısı da 2'nin kuvveti olma zorundadır, fakat bu a nın 1'den büyük tek değerleri için olamaz. $b=3$ durumunda b^3+a sayısı $4(b^2-1)$ sayısını bölüyor, buradan $27+a$ sayısı 32'yi bölüyor ve $a=5$. Tüm çözümler: $(1,1,2),(3,5,12),(5,3,12)$.