**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Nisan 2014

**Soru:**

$n \geq 3$ tam sayı olmak üzere, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin farklı $S_1, S_2, \ldots, S_m$ alt kümelerinin birbirinden farklı herhangi ikisinin tam olarak bir ortak elemanı varsa, $m$ en fazla kaç olabilir?

**Çözüm:**

Cevap: $m = n$. $S_1 = \{1\}, S_2 = \{1, 2\}, \ldots, S_n = \{1, n\}$ alt kümeleri koşulları sağlıyor.

Şimdi $m \leq n$ olduğunu gösterelim.

$S_1, S_2, \ldots, S_m$ koşulları sağlayan alt kümeler olsun. Her $S_j$ için $n$ boyutlu $v^j = (a_1^j, a_2^j, \ldots, a_n^j)$ vektörü tanımlayalım:

$$a_i^j = \begin{cases} 1 & i \in S_j \\ 0 & i \notin S_j \end{cases}$$

$S_i$ kümesindeki toplam eleman sayısı $|S_i|$ olsun. Şimdi $v^1, v^2, \ldots, v^m$ vektörlerinin lineer bağımsız olduklarını ve dolayısıyla $m \leq n$ olduğunu gösterelim. Genelliği bozmadan

$$v^1 = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i v^i \qquad (1)$$

olduğunu varsalyalım. Bir $j \neq 1$ indisi alalaım. (1) in her iki tarafını $v^j$ ile skaler olarak çarpalım:

$$1 = \sum_{i=2,3,\ldots,m; i\neq j} \alpha_i + \alpha_j |S_j| = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i + \alpha_j |S_j| - \alpha_j \qquad (2)$$

(1) in her iki tarafını $v^1$ ile skaler olarak çarpalım:

$$|S_1| = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \qquad (3)$$

Şimdi (2) ve (3) den $1 = \alpha_j(|S_j| - 1) + |S_1|$ elde ederiz. $|S_j| = 1$ ise $m \leq n$ olma zaunda. Diğer durumda $\alpha_j \leq 0$. Fakat her $j \neq 1$ için $\alpha_j \leq 0$ olması (1) ile çelişiyor.