Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mart 2014

Soru:

$n \notin \{0, -1, +1\}$ tam sayısının en küçük asal böleni $d(n)$ olsun.

$$P(n + d(n)) = n + d(P(n))$$

eşitliğini, $d(P(n))$ nin tanımlı olduğu her $n > 2014$ tam sayısı için sağlayan tüm tam sayı katsayılı $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

Çözüm:

Cevap: $P(x) = x, P(x) \equiv 1, 0, -1$.

$P(x)$ polinomunun derecesi $deg(P(x)) \geq 2$ olsun. q, yeterince büyük asal sayı olmak üzere, $n = q$ alalım: $P(q + d(q)) = q + d(P(q))$ olduğundan $P(2q) = q + d(P(q))$ elde ederiz. O zaman $|P(2q)| \leq q + |P(q)|$ ve

$$|\frac{P(2q)}{P(q)}| \leq \frac{q}{|P(q)|} + 1 \qquad (\dagger)$$

$(\dagger)$ eşitsozliğinde q sayısını büyütünce sol taraf $2^{deg(P(x))}$, sağ taraf ise 1 sayısına yaklaşıyor, celişki.

Şimdi $deg(P(x)) = 1$ olsun: $P(x) = bx + c$. Yine $n = q$ alırsak $2bq + c = q + d(bq + c)$ ve $(2b - 1)q + c = d(bq + c)$ elde ederiz. q yeterince büyük ise $b \geq 1$ ve $(2b - 1)q + c \leq bq + c$ elde ediyoruz ve buradan $b = 1$ olma zorunda. Şimde $n + d(n) + c = n + d(n + c)$ ve

$$d(n) + c = d(n + c) \qquad (\dagger\dagger)$$

$c > 0$ ise $n = 2^l - c$ alırsak (††) de sol taraf en az 3, sağ taraf ise 2 oluyor.
$c < 0$ ise $n = 2^l$ alırsak (††) de sol taraf en fazla 1, sağ taraf ise en az 2 oluyor.

Sonuç olarak $c = 0$ ve $P(x) = x$.

$deg(P(x)) = 0$ ise $c \neq 0, \pm 1$ değerleri için $c = n + d(c)$ çelişkisi elde ediliyor.