Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2013

Soru:

$a + b + c = 1$ koşulunu sağlayan tüm pozitif gerçel a, b, c sayıları için

$$\frac{a^4 + 5b^4}{a(a+2b)} + \frac{b^4 + 5c^4}{b(b+2c)} + \frac{c^4 + 5a^4}{c(c+2a)} \geq 1 - ab - bc - ca$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$f(a,b,c) = \dfrac{a^4 + 5b^4}{a(a+2b)} + \dfrac{b^4 + 5c^4}{b(b+2c)} + \dfrac{c^4 + 5a^4}{c(c+2a)}$ olsun. $a + b + c = 1$ olduğundan ispatlamamız gereken eşitsizlik $f(a,b,c) \geq a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac$ dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden pozitif $x_1, \ldots, x_n$ için

$$(x_1 + \cdots + x_n)(\frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n}) \geq (a_1 + \cdots + a_n)^2 \qquad (1)$$

(1) eşitsizliğinden

$$\frac{a^4}{a(a+2b)} + \frac{b^4}{b(b+2c)} + \frac{c^4}{c(c+2a)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2} = (a^2+b^2+c^2)^2 \qquad (2)$$

$$\frac{b^4}{a(a+2b)} + \frac{c^4}{b(b+2c)} + \frac{a^4}{c(c+2a)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)^2} = (a^2+b^2+c^2)^2 \qquad (3)$$

eşitsizliklerini ve daha sonra (2) + 5 (3) yaparak $f(a,b,c) \geq 6(a^2+b^2+c^2)^2$ elde ediyoruz. O zaman ispatlanması gereken eşitsizlik

$$6(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (a+b+c)^2 - ab - bc - ac = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac \tag{4}$$

şeklindedir. Şimdi $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$, $\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$, $\frac{c^2+a^2}{2} \geq ca$ eşitsizliklerini toplarsak $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ elde ederiz. Demek ki, $6(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 2(a^2+b^2+c^2)$ veya $3(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 1$ olduğunu göstermemiz gerekiyor ki bu da $a+b+c=1$ olduğundan kuadratik ortalama - aritmetic ortalama eşitsizliğidir.