



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Nisan 2013

Soru:

99×99 satranç tahtasının bazı birim kareleri, birim karelerden oluşan her 5×5 kare en az 6 işaretlenmiş birim kare içerecek biçimde işaretlenmiştir. İşaretlenmiş birim kare sayısı en az kaç olabilir?

Çözüm: Cevap: 2261.

Birim karelerin merkezlerinin koordinatları $i = 1, 2, \dots, 99; j = 1, 2, \dots, 99$ olmak üzere (i, j) olsun. (i, j) merkezli birim kareyi $u(i, j)$ ile gösterelim. İşaretlenmiş birim kareler:

$$1 \leq k \leq 19, 0 \leq l \leq 19 \text{ olmak üzere } u(5k, 5l + 1) \text{ ve}$$

$$1 \leq m \leq 99, 1 \leq n \leq 19 \text{ olmak üzere } u(m, 5n)$$

olsun. O zaman her 5×5 kare tam olarak 6 işaretlenmiş birim kare içerecek ve işaretlenmiş birim kare sayısı tam olarak 2261 olacaktır.

k pozitif bir tam sayı olsun. Şimdi tümevarım metodunu kullanarak $(5k + 4) \times (5k + 4)$ karenin her 5×5 karesi en az 6 işaretlenmiş kare içeriyorsa, işaretlenmiş kare sayısının en az $6k^2 + 5k$ olduğunu gösterelim.

• $k = 1$. $6 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 11$. $1 \leq k \leq 5, 1 \leq l \leq 5$ olmak üzere $u(k, l)$ birim karelerinden oluşan 5×5 kare P , $5 \leq k \leq 9, 5 \leq l \leq 9$ olmak üzere $u(k, l)$ birim karelerinden oluşan 5×5 kare ise Q olsun. P ve Q karelerinin tam olarak bir tane birim kare içeriyor ($u(5, 5)$ birim karesi). O zaman toplamda en az $6 + 6 - 1 = 11$ birim kare bulunuyor.

• Önermemiz $(5k+4) \times (5k+4)$ A karesi için doğru olsun. $(5k+9) \times (5k+9)$ B karesini ele alalım. A karesi $1 \leq i \leq 5k+4, 1 \leq j \leq 5k+4$ olmak üzere $u(i, j)$ birim karelerini, B karesi de $1 \leq i \leq 5k+9, 1 \leq j \leq 5k+9$ olmak üzere $u(i, j)$ karelerinden oluşsun.

Her $s = 1, 2, \dots, k+1$ için, 5×5 U_s karesi $5k+5 \leq i \leq 5k+9, 5s-4 \leq j \leq 5s$ olmak üzere $u(i, j)$; her $t = 1, 2, \dots, k+1$ için 5×5 squares V_t ise $5t-4 \leq i \leq 5t, 5k+5 \leq j \leq 5k+9$ olmak üzere $u(i, j)$ birim karelerinden oluşsun. $u(5k+5, 5k+5)$ birim karesi U_{k+1} ve V_{k+1} karelerinin tek ortak birim karesidir, diğer U_s ve V_t karelerinin ortak birim karesi yoktur. $B - A$ kümesi $k+1$ tane U_s ve $k+1$ tane V_t kare içeriyor. Sonuç olarak $B - A$ en az $6 \cdot 2(k+1) - 1 = 12k + 11$ tane işaretlenmiş birim kare içermek zorundadır. O zaman tümevarım varsayımından B karesi en az $6k^2 + 5k + 12k + 11 = 6(k+1)^2 + 5(k+1)$ işaretlenmiş birim kare içermek zorundadır. Önerme ispatlandı.

Son olarak $k = 19$ alırsak 99×99 karesinin en az 2261 işaretlenmiş birim kare içerdiğini elde ederiz.