



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Şubat 2013

Soru:

n kentten oluşan bir ülkede hava yolları şirketi bazı kent ikilileri arasında her kentten her kente direkt veya aktarmalı ulaşım olacak biçimde *tek yönlü* uçuşlar düzenliyor. Bu tür her uçuş düzenlemesinde her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçuş içeren kapalı güzergah en fazla 2013 uçuş içeriyorsa, n en fazla kaç olur?

Çözüm: Cevap : $n = 88$.

Her $n \geq 89$ değeri için her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçuş içeren kapalı güzergahın 2013 den fazla yol içerdiği bir düzenleme olduğunu gösterelim. Kentler $A_1, \dots, A_{89}, \dots, A_n$ olmak üzere, uçuşlar:

her $i = 1, \dots, 43$ için A_i den A_{i+1} e

her $i = 45, \dots, 89$ için A_{44} den A_i ye

her $i = 45, \dots, 89$ için A_i den A_1 e

$n > 89$ durumunda bunlara ek olarak

A_1 den A_{90} a; her $i = 90, \dots, n - 1$ için A_i den A_{i+1} e ve A_n den A_1 e

düzenlenmiş olsun. Bu durumda her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçuş içeren kapalı güzergah en az $45 \cdot 45 = 2025 > 2013$ uçuş içermektedir.

Şimde ise $n = 88$ durumunda her uçuş düzenlemesinde her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçuş içeren kapalı güzergahın en fazla 2013 uçuş içerdiğini gösterelim.

Her A_i ve A_j kent ikilisi için A_j den A_i varmak için yapılması gereken en az uçuş sayısı $d(A_i, A_j)$ olmak üzere, $\max_{i,j} d(A_i, A_j) = d(A_l, A_m) = p$ olsun (burada maksimum tüm (i, j) ikilileri üzerinden hesaplanmıştır. p uçuş içeren $A_l \rightarrow A_m$ güzergahı, A_l den A_m ye en kısa güzergah olduğundan tam olarak p farklı kent içeriyor. A_m den bu p kentten farklı yeni bir kente en fazla p uçuş kullanarak gidelim. Daha sonra tüm kalan kentlere her yeni kent için en fazla p uçuş kullanarak birer birer uğrayalım. O zaman her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçuş içeren kapalı güzergahın toplam uçuş sayısı en fazla $p + p(88 - p) = p(89 - p) \leq 44 \cdot 45 = 1980 \leq 2013$ olacaktır.