Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ocak 2013

Soru:

a, b ve c negatif olmayan ve $a+b+c=\dfrac{9}{2}$ koşulunu sağlayan gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{a}{b^3+54}+\frac{b}{c^3+54}+\frac{c}{a^3+54}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm:

Cevap : $f(a,b,c)=\dfrac{a}{b^3+54}+\dfrac{b}{c^3+54}+\dfrac{c}{a^3+54}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer $\dfrac{2}{27}$ dir. $f(a,b,c)$ bu değeri $(a,b,c)=(0,\frac{3}{2},3),(3,0,\frac{3}{2}),(\frac{3}{2},3,0)$ niktalarında alıyor.

$f(a,b,c)\geq\frac{2}{27}$ ispatlamamız gerekiyor. $a+b+c=\frac{9}{2}$ olduğundan,

$$(\frac{a}{b^3+54}-\frac{a}{54})+(\frac{b}{c^3+54}-\frac{b}{54})+(\frac{c}{a^3+54}-\frac{c}{54})\geq\frac{2}{27}-\frac{9}{2\cdot 54}$$

veya

$$\frac{ab^3}{b^3+54}+\frac{bc^3}{c^3+54}+\frac{ca^3}{a^3+54}\leq\frac{1}{2} \qquad (\dagger)$$

eşitsizliğini göstermemiz gerekiyor. $\dfrac{b^3+27+27}{3} \geq \sqrt[3]{b^3 \cdot 27 \cdot 27} = 9b$ olduğundan $\dfrac{b}{b^3+54} \leq \dfrac{1}{27}$ elde ediyoruz. Benzer şekilde, $\dfrac{c}{c^3+54} \leq \dfrac{1}{27}$ ve $\dfrac{a}{a^3+54} \leq \dfrac{1}{27}$. Demek ki $f(a,b,c) \geq \frac{2}{27}$ olduğunu göztermek için $ab^2+bc^2+ca^2 \leq \frac{27}{2}$ eşitsizliğini kanıtlamamız yeterli olacaktır.

(x,y,z); (a,b,c) nin $x \geq y \geq z$ koşullarını sağlayan permutasyonu olsun. O zaman

$ab^2+bc^2+ca^2 \leq b\cdot ab+c\cdot bc+a\cdot ca \leq x\cdot xy+y\cdot zx+z\cdot yz = y(x+z)^2-xyz \leq y(x+z)^2.$

Son olarak Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$y(x+z)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2y(x+z)(x+z) \leq \frac{1}{2}\cdot \Big(\frac{2y+x+z+x+z}{3}\Big)^3 = \frac{27}{2}$$

elde ediyoruz. Eşitlik durumunda $2y = x+z$ ve $xyz=0$, dolayısıyla $(a,b,c) = (0,\frac{3}{2},3), (3,0,\frac{3}{2}), (\frac{3}{2},3,0)$.

Not. (†) eşitsizliğinin ispatında eşitlik durumunun sadece $b=3$, $c=3$ ve $a=3$ de olduğu $\dfrac{b}{b^3+54} \leq \dfrac{1}{27}$, $\dfrac{c}{c^3+54} \leq \dfrac{1}{27}$ ve $\dfrac{a}{a^3+54} \leq \dfrac{1}{27}$ eşitsizliklerini kullandık. Bulduğumuz $(a,b,c) = (0,\frac{3}{2},3), (3,0,\frac{3}{2}), (\frac{3}{2},3,0)$ durumlarında (†) eşitsizliğinde iki terim sıfıra eşit oluyor ve eşitlik sağlanıyor.