Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Aralık 2012

Soru:

$abc = 1$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a+b}{b(2+a)} + \frac{b+c}{c(2+b)} + \frac{c+a}{a(2+c)} \geq T$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, T gerçel sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

Cevap : $T = 2$.

$a = b = c = 1$ durumunda eşitsizliğin sol tarafı 2 ye eşit olduğundan,

$$\frac{a+b}{b(2+a)} + \frac{b+c}{c(2+b)} + \frac{c+a}{a(2+c)} \geq 2$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $a = 1/x, b = 1/y, c = 1/z$ $(xyz = 1)$ tanımlarsak ispatlanacak eşitsizlik

$$\frac{x+y}{2x+1} + \frac{y+z}{2y+1} + \frac{z+x}{2z+1} \geq 2$$

şeklini alıyor. Tarafları $(2x+1)(2y+1)(2z+1)$ ile çarpıp sadeleştirirsek

$$(x^2y+y^2z+z^2x)+(x^2y+y^2z+z^2x)+(x^2+y^2+z^2) \geq (xy+yz+zx)+(x+y+z)+3 \quad (\dagger)$$

elde ederiz. Şimdi

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 3 \tag{1}$$

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq x + y + z \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \tag{3}$$

olduğunu gösterelim.

(1)' in ispatı: $x^2y + y^2z + z^2x \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3\sqrt[3]{1} = 1.$

(2)' nin ispatı: $x^2y+y^2z+z^2x = \frac{1}{3}((x^2y+x^2y+z^2x)+(y^2z+y^2z+x^2y)+(z^2x+z^2x+y^2z)) \geq \frac{1}{3}(3\sqrt[3]{x^5y^2z^2} + 3\sqrt[3]{y^5z^2x^2} + 3\sqrt[3]{z^5y^2z^2}) = \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{y^3} + \sqrt[3]{z^3} = x + y + z.$

(3)' ün ispatı: $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = \frac{1}{2}((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2) \geq 0.$

(1),(2) ve (3) eşitsizliklerinin toplarsak (†) eşitsizliğini elde ederiz.