Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Kasım 2012

Soru:

$m < n$ olmak üzere, m ve n aralarında asal iki pozitif tam sayı olsun. Periyotları sırasıyla m ve n olup ilk 2012 elemanları aynı olan (her $i = 1, 2, \ldots, 2012$ için $a_i = b_i$) iki $\{a_i\}$ ve $\{b_i\}$ sonsuz dizileri bulunuyorsa, n nin alabileceği en küçük değer nedir?

(*Periyodu p olan $\{a_i\}$ dizisinde her i için $a_{i+p} = a_i$ eşitliği sağlanıyor ve p, bu koşulu sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır*).

Çözüm:

Cevap : $n = 1008$.

Periyodu $m = 1007$ olan $\{a_i\}$ dizisini $i = 1, 2, \ldots, 1005$, için $a_i = 1$, $a_{1006} = 2, a_{1007} = 2$ olarak tanımlayalım.

Periyodu $n = 1008$ olan $\{b_i\}$ dizisini de $i = 1, 2, \ldots, 1005$, için $b_i = 1$, $b_{1006} = 2, b_{1007} = 2, b_{1008} = 1$ olarak tanımlayalım.

Bu dizilerin ilk 2012 terimlerinin aynı olduğu açıktır: $a_i = b_i$; $i = 1, 2, \ldots, 2012$.

Şimdi m ve n aralarında asal iki pozitif tam sayı olmak üzere, peroyodları m ve n olan $\{a_i\}$ ve $\{b_i\}$ dizilerinin en fazla ilk $m + n - 2$ ardışık terimlerinin aynı olabileceğini gösterelim.

Aksini varsayalım: dizilerin ilk $m+n-1$ terimleri aynı olsun. O zaman $n = m \cdot k + r$ olmak üzere, her $i \in \{n+1, n+2, \ldots, n+m-1\}$ için of $\{a_i\}$ ve $\{b_i\}$ dizilerinin terimleri aynıdır. Buradan

$i = n+1$ için $a_{n+1} = b_{n+1} = b_1 = a_1$ ve $b_{n+1} = a_{n+1} = a_{r+1}$. Sonuç olarak $a_1 = a_{r+1}$.
$i = n+2$ için $a_{n+2} = b_{n+2} = b_2 = a_2$ ve $b_{n+2} = a_{n+2} = a_{r+2}$. Sonuç olarak $a_2 = a_{r+2}$.
.
.
.

$i = n+m-1$ için $a_{n+m-1} = b_{n+m-1} = b_{m-1} = a_{m-1}$ ve $b_{n+m-1} = a_{n+m-1} = a_{r-1}$. Sonuç olarak $a_{m-1} = a_{r-1}$.

m ve n aralarında asal olduğundan elde ettiğimiz $a_1 = a_{r+1}$, $a_2 = a_{r+2}$, $\ldots$, $a_{m-1} = a_{r-1}$ eşitliklerinden $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$ sonucuna varıyoruz. Bu da $\{a_i\}$ dizisinin periyodunun m olmasıyla çelişiyor.

Demek ki $m+n-2 \geq 2012$ ve $n \geq 1008$ $(n > m)$.