Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Eylül 2012

Soru:

$abc = 1$ koşulunu sağlıyan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{a+b}{ab+a+b} + \frac{b+c}{bc+b+c} + \frac{c+a}{ca+c+a} \geq T$$

ise, T gerçel sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

Cevap: $T = 2$.

$$\frac{a+b}{ab+a+b} + \frac{b+c}{bc+b+c} + \frac{c+a}{ca+c+a} \geq 2 \qquad \dagger$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ olsun:

$$\frac{x^3+y^3}{x^3y^3+x^3+y^3} + \frac{y^3+z^3}{y^3z^3+y^3+z^3} + \frac{z^3+x^3}{z^3x^3+z^3+x^3} \geq 2$$

İlk önce

$$\frac{x^3+y^3}{x^3y^3+x^3+y^3} \geq \frac{xz+yz}{xy+yz+xz} \qquad \ddagger$$

olduğunu gösterelim. x, y, z pozitive olduğundan, $(x^3+y^3)(xy+yz+xz) \geq (xz+yz)(x^3y^3+x^3+y^3)$ veya $x^3+y^3 \geq x^3y^2z+x^2y^3z$ elde ediyoruz. $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ ve $x^3y^2z+x^2y^3z = x^2y+xy^2 = (x+y)xy$ olduğundan (‡) eşitsizliyi ispatlanmış oldu. y, z ve z, x ikilileri için de benzer eşitsizlikler elde edebiliriz. Bu üç eşitsizliğin toplarsak (†) eşitsizliğini elde ederiz. $a=b=c=1$ olursa $T=2$ durumu elde ediliyor.