



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2012

Soru:

$\{1, 2, \dots, 2012\}$ kümesinin tüm altkümeler kümesi S olsun. Tüm $U, V \in S$ ikilileri için

$$f(U \cap V) = \min(f(U), f(V))$$

koşulunu sağlayan kaç $f : S \rightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonu vardır?

Çözüm:

Sadece sıfır değeri alan sıfır fonksiyonu koşulları sağlıyor.

f koşulları sağlayan ve sıfır olmayan bir fonksiyon olsun. $A_f = \bigcap_{f(U)=1} U$ olsun. $f(U) = 1$ ise $A_f \subset U$ olma zorundadır. Diğer taraftan, $A_f \subset U$ ise $f(U) = 1$ olma zorundadır. Demek ki $A_f \subset U$, $f(U) = 1$ olmasının gerek ve yeter koşuludur. A_f . Dolayısıyla, sıfır olmayan bir fonksiyon sayısı en çok 2^{2012} olabilir.

Her $B \in S$ için f_B fonksiyonunu tanımlayalım:

$$f_B(U) = \begin{cases} 1 & \text{if } B \subset U \\ 0 & \text{if } B \not\subset U \end{cases}$$

f_B bariz şekilde koşulları sağlıyor ve dolayısıyla sıfır olmayan fonksiyon sayısı en az 2^{2012} dir. Sonuç olarak koşulları sağlayan fonksiyon sayısının $2^{2012} + 1$ olduğunu elde ediyoruz.