



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2012

Soru:

$r \in (0, 1)$ rasyonel sayısının ondalık gösterimi; $i = 1, 2, \dots, n$ için $r_i \neq 9$ olmak üzere $r = 0.r_1r_2\dots, r_n$ şeklinde ise r sayısına n -iyi sayı diyelim. Tüm n -iyi sayıların kümesi G_n olsun. $|G_n|$, G_n kümesinin eleman sayısı ve S_n , G_n kümesinin tüm elemanlarının toplamı ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|G_n|}{S_n}$$

limitini bulunuz.

Çözüm:

Cevap: $\frac{9}{4}$.

$|G_n| = 9^n$ ve $S_n = \sum \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{10^k}$ olduğu açıktır, burada ilk toplam $r_i \neq 9$ koşulunu sağlayan tüm (r_1, \dots, r_n) ifadeleri üzerinden hesaplanıyor. O zaman

$$S_n = 9^{n-1} \cdot (0 + 1 + \dots + 8) \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^n} \right) = 9^{n-1} \cdot 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

elde ediyoruz ve sonuç olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|G_n|}{S_n} = \frac{9}{4}.$$