Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Kasım 2011

Soru:

$xyz = 1$ koşulunu sağlıyan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+y}\right)^2 + \left(\frac{z}{1+z}\right)^2 \geq A$$

ise, A gerçel sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

A sayısının alabileceği en büyük değerin $\frac{3}{4}$ olduğunu gösterelim. $x = y = z = 1$ ise eşitsizliğin sol tarafı $\frac{3}{4}$'e eşit oluyor. Dolayısıyla, eşitsizliği $A = \frac{3}{4}$ için ispatlamamız yeterli olacaktır. $a = yz, b = xz$ ve $c = xy$ olsun. O zaman $abc = 1$ ve ispatlanması gereken eşitsizlik

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{3}{4}$$

oluyor. Şimdi

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab} \qquad \dagger$$

olduğunu gösterelim. Her iki tarafı $(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)$ ile çarparsak, $ab^3 + ba^3 + 1 \geq a^2b^2 + 2ab$ veya $ab(a-b)^2 + (1-ab)^2 \geq 0$ elde ediyoruz. $\dagger$ eşitsizliğinde $a = c$ ve $b = 1$ yazarsak

$$\frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{1+c} \qquad \dagger\dagger$$

elde ederiz. † ve †† toplamından

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\geq\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+c}-\frac{1}{4}=\frac{1+1+c+ab}{1+c+ab+abc}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

elde ederiz ve çözüm tamamlanır.