**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Ekim 2011

**Soru:**

$x_1 + x_2 + x_3 \cdots + x_{2011} = 1$ eşitliğini sağlayan tüm $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$ negatif olmayan gerçel sayıları için

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{2011}x_1 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{2011}x_1x_2$$

ifadesinin $\frac{31}{108}$ den büyük değer alamayacağını kanıtlayınız.

**Çözüm:**

$A(x_1, x_2, \ldots, x_{2011}) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{2011}x_1$ olsun.
Her $i = 1, 2, \ldots, 2011$ için $x'_i \neq 0$ ise, $x'_{k-1} + x'_{k+1}$ ifadesini minimum yapan bir $k$ alalım. ($x'_{2012} = x'_1$). O zaman her $l > k + 1$ için

$A(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2011}) \leq A(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k-1}, 0, x'_{k+1}, \ldots, x'_{l-1}, x'_l + x'_k, x'_{l+1}, \ldots, x'_{2011})$.

Sonuc olarak $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$ sayılarının en az birinin sıfıra eşit olduğunu kabul edebiliriz. Genelliği bozmadan $x_{2011} = 0$ olsun. Şimdi

$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{2011}x_1 \leq (x_1 + x_3 + \cdots + x_{2011})(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2010})$ olduğundan

AG eşitsizliği kullanarak

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{2011}x_1 \leq (\frac{(x_1 + x_2 + x_3 \cdots + x_{2011})}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

elde ediyoruz.

$B(x_1, x_2, \ldots, x_{2011}) = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{2011}x_1x_2$ olsun.
Her $i = 1, 2, \ldots, 2011$ için $x'_i \neq 0$ ise, $x'_{k-2}x'_{k-1} + x'_{k-1}x'_{k+1} + x'_{k+1}x'_{k+2}$ ifadesini minimum yapan bir $k$ alalım. $(x'_{2012} = x'_1, x'_{2013} = x'_2)$. O zaman her $l > k+2$ için

$$B(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2011}) \leq B(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k-1}, 0, x'_{k+1}, \ldots, x'_{l-1}, x'_l + x'_k, x'_{l+1}, \ldots, x'_{2011}).$$

Sonuc olarak $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$ sayılarının en az birinin sıfıra eşit olduğunu kabul edebiliriz. Genelliği bozmadan $x_{2011} = 0$ olsun. Şimdi

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{2011}x_1x_2 \leq (x_1 + x_4 + \cdots + x_{2011})(x_2 + x_5 + \cdots + x_{2010})(x_3 + x_6 + \cdots + x_{2011})$$

olduğundan AG eşitsizliği kullanarak

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{2011}x_1x_2 \leq (\frac{(x_1 + x_2 + x_3 \cdots + x_{2011})}{3})^3 = \frac{1}{27}$$

elde ediyoruz. $A(x_1, x_2, \ldots, x_{2011}) + B(x_1, x_2, \ldots, x_{2011}) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{27} = \frac{31}{108}$ olduğundan çözüm tamamlanmıştır.