Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Temmuz-Ağustos 2011

Soru:

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ve $S(A)$, A kümesinin bazı $D \subset A$ altkümelerinin oluşturduğu bir küme olsun.

• her $D \in S(A)$ en fazla $n-1$ eleman içeriyor

• A kümesinin her elemanı tam olarak 4 farklı altkümenin elemanıdır

• $i \neq j$ olmak üzere her sıralı olmayan $a_i, a_j \in A$ ikilisi tam olarak bir D altkümesinin elemanıdır

koşulları sağlanıyorsa, n nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm:

Eleman sayısı 4 ten fazla olan bir $D_0 = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $k > 4$ altkümesi olsun. Bir $a_{k+1} \notin D_0$ elemanı alalım. Her $a_i, a_j \in A$ ikilisi tam olarak bir altkümenin elemanıdır, dolayısıyla $i = 1, \ldots, k$ olmak üzere (a_i, a_{k+1}) ikilileri farklı altkümelere dahil olma zorundalar ve a_{k+1} elemanı en az 5 altkümenin elemanıdır. Elde edilen çelişki her $D \in S(A)$ altkümesinin en fazla 4 eleman içerdiğini gösteriyor. a_1 tam olarak 4 altkümenin elemanıdır, dalayısıyla n en fazla $1 + 4 \cdot 3 = 13$ olabilir. $n = 13$ için örnek:

$D_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$; $D_2 = \{a_1, a_5, a_6, a_7\}$; $D_3 = \{a_1, a_8, a_9, a_{10}\}$; $D_4 = \{a_1, a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$; $D_5 = \{a_2, a_5, a_8, a_{11}\}$; $D_6 = \{a_2, a_6, a_9, a_{12}\}$; $D_7 = \{a_2, a_7, a_{10}, a_{13}\}$; $D_8 = \{a_3, a_7, a_9, a_{11}\}$; $D_9 = \{a_3, a_5, a_{10}, a_{12}\}$; $D_{10} = \{a_3, a_6, a_8, a_{13}\}$; $D_{11} = \{a_4, a_6, a_{10}, a_{11}\}$; $D_{12} = \{a_4, a_7, a_8, a_{12}\}$; $D_{13} = \{a_4, a_5, a_9, a_{13}\}$.