Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Nisan 2011

Soru:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3$$

koşulunu sağlayan tüm pozitif a, b, c gerçel sayıları için,

$$\frac{(ab+b)(2b+1)}{(ab+a)(5b+1)}+\frac{(bc+c)(2c+1)}{(bc+b)(5c+1)}+\frac{(ca+a)(2a+1)}{(ca+c)(5a+1)}\geq\frac{3}{2}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

Çözüm:

$a=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{y}$ ve $z=\frac{1}{z}$ değişkenlerine geçersek eşitsizlik

$$x^2+y^2+z^2\geq 3$$

koşulunu sağlayan tüm pozitif a, b, c gerçel sayıları için,

$$\frac{(x+1)(y+2)}{(y+1)(y+5)}+\frac{(y+1)(z+2)}{(z+1)(z+5)}+\frac{(z+1)(x+2)}{(x+1)(x+5)}\geq\frac{3}{2} \tag{1}$$

eşitsizliğine dönüşüyor.

$t^2 - 2t + 1 \geq 0$ olduğundan $4t^2 + 16t + 16 \geq 3t^2 + 18t + 15$. Dolayısıyla, $4(t+2)^2 \geq 3(t+1)(t+5)$ ve tüm pozitif t değerleri için

$$\frac{t+2}{(t+1)(t+5)} \geq \frac{3}{4(t+2)} \tag{2}$$

elde ediyoruz. (2) eşitsizliğini (1) eşitsizliğinin her terimine uygularsak,

$$\frac{x+1}{y+2} + \frac{y+1}{z+2} + \frac{z+1}{x+2} \geq 2 \tag{3}$$

eşitsizliğinin (1) i kanıtlamak için yeterli olduğunu görürüz.

Cauchy-Schwatz eşitsizliğinden

$$((x+1)(y+2)+(y+1)(z+2)+(z+1)(x+2))\left(\frac{x+1}{y+2}+\frac{y+1}{z+2}+\frac{z+1}{x+2}\right) \geq (x+y+z+3)^2 \tag{4}$$

elde ederiz. $x^2+y^2+z^2 \geq 3$ olduğundan $(x+1)(y+2)+(y+1)(z+2)+(z+1)(x+2) = xy+yz+zx+3(x+y+z)+6 = \frac{1}{2}((x+y+z+3)^2-(x^2+y^2+z^2-3)) \leq \frac{1}{2}(x+y+z+3)^2$.

Dolayısıyla (4) den (3) eşitsizliğini elde ediyoruz. Çözüm tamamlanmıştır.