



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2011

Soru:

Uzayda n nokta var, bazı nokta ikilileri birbirleriyle aralarında kesişmeyen doğru parçalarıyla birleştirilmiştir. $C(p)$, p noktasıyla bu noktaya bir doğru parçasıyla birbaşa bağlı olan tüm noktaların bileşimi olsun. Noktalar beyaz veya siyah renge boyanıyorlar. Başlangıçta tüm noktalar beyaz renge boyanmıştır. Her hamlede bir p noktası seçiliyor ve $C(p)$ kümesindeki her noktanın rengi değiştiriliyor. Sonlu sayıda hamle yaparak tüm noktaların siyah renge boyanabileceğini kanıtlayınız.

Çözüm:

Noktalar $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $A = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olsun. Tümevarım kullanacağız.

$n = 1$ durumu barizdir.

Tümevarım varsayımı: sonlu hamle sonucunda n nokta siyah renge boyanabilir. $i = 1, \dots, n + 1$ olmak üzere, her p_i noktası için $I(i)$, $A - p_i$ noktalarını siyah renge boyayan hamleler dizisi olsun. Herhangi bir i için I_i sonucunda p_i noktası da siyah renge boyanıyorsa, çözüm tamamlanıyor. Eksini varsayalım.

Durum 1. $n + 1$ çift sayı olsun. Bu durumda $I(1), I(2), \dots, I(n + 1)$ hamle dizilerinin bileşimi tüm $n + 1$ noktayı siyah renge boyuyor.

Durum 2. $n + 1$ tek sayı olsun. $n + 1$ tek olduğundan, en az bir $q \in A$ noktası için $C(q)$ kümesi tektir. $C(q) = \{q, q_1, q_2, \dots, q_{2l}\}$ olsun. O zaman $q, I(q), I(q_1), I(q_2), \dots, I(q_{2l})$ hamle dizilerinin bileşimi tüm $n + 1$ noktayı siyah renge boyuyor.

İspat tamamlanmıştır.