Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Aralık 2010

Soru:

$x + y + z = 1$ olmak üzere, tüm x, y ve z gerçel sayıları için

$$\frac{x^3}{x^2+1} + \frac{y^3}{y^2+1} + \frac{z^3}{z^2+1} \geq A$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük A sayısı kaçtır?

Çözüm:

Cevap: $A = \dfrac{1}{10}$.

Eşitsizliği

$$x - \frac{x^3}{x^2+1} + y - \frac{y^3}{y^2+1} + z - \frac{z^3}{z^2+1} \leq 1 - A$$

gibi yazarsak

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \leq \frac{9}{10} \qquad (*)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $(*)$ eşitsizliğini ispatlayalım.

Durum 1: $x, y, z \in [0, \sqrt{3}]$ olsun. $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Tüm $t \in [0, \sqrt{3}]$ için $f''(t) = \frac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3} \leq 0$ olduğundan $f(\cdot)$ fonksiyonu $[0, \sqrt{3}]$ aralığında içbükeydir ve $f(x) + f(y) + f(z) \leq 3f(1/3) = 9/10$.

Genelliği bozmadan $x \geq y \geq z$ kabul edelim. O zaman $z < 0$ olur.

$f'(t) = \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ olduğundan

$f(\cdot)$ fonksiyonu $(-\infty, -1)$ aralığında azalıyor, $(-1, 1)$ aralığında artıyor ve $(1, \infty)$ aralığında azalıyor $(**)$

Durum 2: $y < 1/2$ olsun. O zaman $(**)$ dan

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} < f(1) + f(\frac{1}{2}) + 0 = \frac{9}{10}$$

elde ediyoruz.

Durum 3: $y \geq 1/2$ olsun.

$z \geq -\dfrac{1}{2}$ ise, $(**)$ dan

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \leq \frac{x}{(1/2)^2+1} + \frac{y}{(1/2)^2+1} + \frac{z}{(1/2)^2+1} = \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$$

elde ediyoruz.

$-3 \leq z < -\dfrac{1}{2}$ ise, $f(-3) > f(-1/2)$ olduğundan $(**)$ dan

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \leq f(1) + f(1) + f(-3) = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

elde ediyoruz.

$z < -3$ ise, $x > 2$ ve $(**)$ dan

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \leq f(2) + f(1) + 0 = \frac{9}{10}$$

elde ediyoruz.

$x = y = z = \dfrac{1}{3}$, $(*)$ eşitsizliğinde eşitlik durumudur $\square$