Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Nisan 2010

Soru:

Doğal sayılardan oluşan ve sabit olmayan $a_1, a_2, \ldots$ aritmetik dizisinin bir a_n elemanı için $\sqrt[2010]{a_n}$ sayısı rasyoneldir. Dizinin bir a_m elemanı için, $\sqrt[3]{a_m}$ sayısının rasyonel ve $\sqrt[2]{a_m}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Bir dağal sayının k dereceden kökü ya doğal yada irrasyönel sayıdır. Demek ki bir n değeri için $\sqrt[2010]{a_n}$ doğal sayıdır ve dolayısıyla $\sqrt[3]{a_n}$ da doğal sayıdır. d, aritmetik dizisinin ortak farkı olmak üzere, $T = (\sqrt[3]{a_n} + \sqrt[3]{a_n}d^2)$ olsun. $S = T^3 = a_n + d(3(\sqrt[3]{a_n})^2 + 3\sqrt[3]{a_n}d + d^2)$ olduğundan, S aritmetik dizinin bir elemanıdır: $S = a_m$ ve $\sqrt[3]{a_m} = T$ bir doğal sayıdır. $\sqrt[2]{a_m}$ say sının irrasyonel olduğunu gösterelim. $\sqrt[2]{a_m}$ doğal sayı olsun: P doğal sayı olmak üzere, $S = P^2$ olsun. $S = T^3$ olduğundan, S sayısını doğal çarpanlarına ayırırsak, $S = p_1^{6a_1} p_2^{6a_2} \cdots p_l^{6a_l}$ elde ederiz. Demek ki T sayısı da tam karedir. $T = \sqrt[3]{a_n}(1+d^2)$ ve $\sqrt[3]{a_n}$ sayısının tam kare olduğundan, $1+d^2$ sayısının da tam kare olduğunu elde ediyoruz ($d \neq 0$). Çelişki: $d^2 < 1+d^2 < (d+1)^2$.