



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2010

Soru:

\mathbf{Q} rasyonel sayılar kümesi olmak üzere, $f(1) = 2$ ve $f(xy) + f(x+y) = f(x)f(y) + 1$ koşullarını sağlayan tüm $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

Cevap:

Fonksiyonel denklemde $y = 1$ yazalım : $f(x) + f(x+1) = f(x)f(1) + 1$. $f(1) = 2$ olduğundan $f(x+1) = f(x) + 1$ ve tüm q tam sayıları için $f(x+q) = f(x) + q$ elde ediyoruz. O zaman tüm p tam sayıları için $f(p+1) = p+1$ oluyor.

Fonksiyonel denklemde p tam ve q doğal sayı olmak üzere $x = \frac{p}{q}$ ve $y = q$ yazalım: $f(\frac{p}{q} \cdot q) + f(\frac{p}{q} + q) = f(\frac{p}{q})f(q) + 1$ veya $f(p) + f(\frac{p}{q}) + q = f(\frac{p}{q})(q+1) + 1$. Sonuç olarak $f(\frac{p}{q}) = \frac{p+q}{q} = 1 + \frac{p}{q}$ elde ediyoruz. $f(\frac{p}{q}) = 1 + \frac{p}{q}$ fonksiyonu koşulları sağlıyor.