**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Şubat 2010

**Soru:**

$n$ doğal sayısı için, $a, b$ ve $c$ asal sayılar olmak üzere, $a^n + b^n = c^2$ denkleminin en az bir çözümü varsa, $n$ en fazla kaç olabilir?

**Çözüm:**

Cevap: $n = 1$.

$n = 1$ ise $a = 7, b = 2, c = 3$ bir çüzümdür. Tüm $n > 1$ değerleri için çüzüm olmadığını göstrelim.

$n$ tek sayı olsun. $(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1}) = c^2$ olduğundan $c^2$, $a + b$ ile bölünüyor. $a + b < a^n + b^n$ ve $c$ asal olduğundan $a + b = c$. O zaman $c^2 = (a + b)^2 = a^n + b^n \geq a^3 + b^3 > 2a^2 + 2b^2$ ve $(a - b)^2 < 0$. Çelişki.

$n = 2m$ çift olsun. $a, b, c$ sayılarından biri çift, dolayısıyla 2 olmalı. Fakat $c = 2$ olamıyor. Genelliği bozmadan $a > b = 2$ kabul edelim.

$a = 3$ olsun. O zaman $3^{2m} + 2^{2m} = c^2$. $m$ tekse, $2^{2m}$ sayısının son rakamı 4, $3^{2m}$ sayısının son rakamı 9 ve dolayısıyla $3^{2m} + 2^{2m}$ sayısının son rakamı 3 oluyor. $m$ çiftse, $2^{2m}$ sayısının son rakamı 6, $3^{2m}$ sayısının son rakamı 1 ve dolayısıyla $3^{2m} + 2^{2m}$ sayısının son rakamı 7 oluyor. $c^2$ sayısının son rakamı ise sadece 1,5 or 9 olabilir. Çelişki.

$a \geq 5$ olsun. $(a^m)^2 + 2^{2m} = c^2$ olduğundan $c^2 \geq (a^m + 2)^2$. O zaman $c^2 - (a^m)^2 \geq (a^m + 2)^2 - (a^m)^2 = 4a^m + 4 > a^m \geq 5^m > 4^m = 2^{2m}$. Çelişki.