



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Aralık 2009

**Soru:**

$a$  bir doğal sayı olmak üzere,  $f(x) = \frac{a^{2x}}{a^{2x} + a}$  olsun.  $\sum_{i=1}^{2010} f\left(\frac{i}{2010}\right)$  toplamının değerini bulununuz.

**Çözüm:**

$$\sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{n-i}{n}\right) = \sum_{i=0}^n f\left(1 - \frac{i}{n}\right) \text{ olduğundan,}$$

$$\sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (f\left(\frac{i}{n}\right) + f\left(1 - \frac{i}{n}\right)) \text{ elde ediyoruz.}$$

$$f(1-x) = \frac{a^{2-2x}}{a^{2-2x} + a} = \frac{a}{a + a^{2x}} = 1 - f(x). \text{ Demek ki, } f(x) + f(1-x) = 1.$$

$$\text{Sonuç olarak, } \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n 1 = \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{O zaman } \sum_{i=1}^{2010} f\left(\frac{i}{2010}\right) = \frac{2011}{2} - f(0) = \frac{2011}{2} - \frac{1}{a+1}.$$