Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ekim 2009

Soru:

Δ gerçel sayısı için:

$0 \leq a_i \leq 1$ olmak üzere, herhangi $A = \{a_1 = 0, a_2 = 1, a_3, \cdots, a_{2009}\}$ kümesinin öyle bir A' altkümesi vardır ki, A' ve $A - A'$ kümelerinin aritmetik ortalamalarının farkı en az Δ'dır.

Δ sayısı en fazla kaç olur?

Çözüm:

A. Önce $\Delta \geq \dfrac{2009}{2 \cdot 2008}$ olduğunu gösterelim. $m(B)$, B kümesinin aritmetik ortalaması olsun. Herhangi A kümesi için $m(A') - m(A - A') \geq \dfrac{2009}{2 \cdot 2008}$ koşulunu sağlayan bir A' altkümesinin varlığını gösterelim.

1. Durum. $\sum_{i=1}^{2009} > \frac{1}{2}$. $A' = \{a_2 = 1, a_3, \cdots, a_{2009}\}$ olsun. O zaman

$$m(A') - m(A - A') \geq \frac{2009}{2 \cdot 2008} - 0 = \frac{2009}{2 \cdot 2008}.$$

2. Durum. $\sum_{i=1}^{2009} \leq \frac{1}{2}$. Let $A' = \{1\}$. O zaman $m(A') - m(A - A') \geq 1 - \dfrac{2007}{2 \cdot 2008} = \dfrac{2009}{2 \cdot 2008}$.

B. Şimdi $\Delta \leq \dfrac{2009}{2 \cdot 2008}$ olduğunu gösterelim. $A = \{0, 1, \dfrac{1}{2008}, \dfrac{2}{2008}, \cdots, \dfrac{2007}{2008}\}$ olsun ($A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\}$ olarak da seçilebilir). Herhangi A' altkümesini için $m(A') - m(A - A') \leq \dfrac{2009}{2 \cdot 2008}$ olduğunu kanıtlayalım. $m(A') - m(A - A') > 0$ olsun ve $A - A'$ k eleman içersin. O zaman $m(A - A')$ sayısı $0, \dfrac{1}{2008}, \dfrac{2}{2008}, \cdots, \dfrac{k-1}{2008}$ sayılarının aritmetik ortalamasından az değil: $m(A - A') \geq \dfrac{k-1}{2 \cdot 2008}$. A kümesinin elemanlarının toplamı $\dfrac{2009}{2}$ dir. Dolayısıyla,

$$m(A') \leq \frac{\dfrac{2009}{2} - \dfrac{(k-1)k}{2 \cdot 2008}}{2009 - k}.$$

Sonuç olarak,

$$m(A') - m(A - A') \leq \frac{\dfrac{2009}{2} - \dfrac{(k-1)k}{2 \cdot 2008}}{2009 - k} - \frac{k-1}{2 \cdot 2008} = \frac{2009}{2 \cdot 2008}.$$

Demek ki Δ sayısı en fazla $\dfrac{2009}{2 \cdot 2008}$ olur.