**Bilkent Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**

# Ayın Sorusu

Haziran 2009

**Soru:**

Birbirinden farklı $a$ ve $b$ doğal sayıları için $b^2 + a = p^k$ ve $a^2 + b = np^k$ koşullarını sağlayan asal $p$ ve doğal $k, n$ sayıları bulunuyor. Tüm $a, b$ sayı ikililerini bulun.

**Çözüm:**

$b = 1$ ise $a + 1$ ifadesi $a^2 + 1$ yi ve dolayısıyla 2 yi bölüyor. Buradan $a = 1$. Fakat $a \neq b$ olma zorunda. Çözüm yok.

$b > 1$ ve $b^2 + a = p^k$ olsun. O zaman $a^2 + b \equiv 0\, mod(b^2 + a)$ ve $b^2 + a \equiv 0\, mod(b^2 + a)$. Dolayısıyla $b^2 + a)$ modunda $b = -a^2$ ve $b^4 = a^2$ elde ediyoruz. Demek ki, $b^2 + a$, $b^4 + b$ yi bölüyor. $b^4 + b = b(b^3 + 1)$, $ebob(b, b^3 + 1) = 1$ ve $b^2 + a = p^k$ olduğundan $b^2 + a$ ifadesi $b$ ve $b^3 + 1$ ifadelerinden tam olarak bir tanesini bölme zorundadır. $b^2 + a$, $b$ yi bölemez, sonuç olarak $b^2 + a$, $b^3 + 1 = (b + 1)(b^2 - b + 1)$ yi bölüyor. $b+1 < b^2+a$ ve $b^2-b+1 < b^2$ olduğundan $(b+1)(b^2-b+1)$ ifadesinin her iki çarpanı da $b^2 + a$ ile bölünmüyor. $b^2 + a = p^k$ olduğundan her iki çarpan $p$ ile bölünüyor. Demek ki, $p$, $ebob(b+1, b^2-b+1)$ yi bölüyor. $b^2 - b + 1 \equiv 3\, mod(b+1)$ olduğundan $p = 3$ elde ediyoruz. Şimdi $3^k$, $(b + 1)(b^2 - b + 1)$ yi bölüyor. $k = 1$ olamaz. $k = 2$ ise, $b = 2$ ve $a = 5$. $k \geq 3$ olsun. $b^2 - b + 1$ ifadesi 9 a bölünmüyor. O zaman $3^{k-1}$, $b + 1$ yi bölme zorundadır. Bu durumda $b \geq 3^{k-1} - 1$ ve $b^2 \geq (3^{k-1} - 1)^2$. Sonuç olarak, $3^{k-1} = \dfrac{b^2 + a}{3} > \dfrac{(3^{k-1} - 1)^2}{3} > 3^{k-1}$ $(k \geq 3)$ ve çelişki elde ediyoruz. Tek çözüm $a = 5$ , $b = 2$ ikilisidir.