



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2009

Soru:

Derecesi 2009 olan bir $P(x)$ polinomu her $x \in [0, 2009]$ için $|P(x)| \leq 1$ koşulunu sağlıyorsa $P(-1) \leq 2^{2010} - 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$P(x)$, derecesi n olan ve her $x \in [0, n]$ için $|P(x)| \leq 1$ koşulunu sağlayan bir polinom ise, $P(-1) \leq 2^{n+1} - 1$.

İspatı tümevarımla yapacağız.

1. $n = 0$ ise $P(x) = \text{const}$ oluyor.
2. İfademiz $n = k$ için doğru olsun. $P(x)$ polinomunun derecesi $k+1$ olsun. Derecesi n olan $Q(x) = P(x) - P(x+1)$ polinomunu tanımlayalım. Her $x \in [0, k]$ için $|Q(x)| \leq 2$ ve $\frac{1}{2}Q(x)$ polinomu tümevarım koşullarını sağlıyor. O zaman $\frac{1}{2}Q(-1) \leq 2^{k+1} - 1$ ve $P(-1) = P(0) + Q(-1) \leq 1 + 2(2^{k+1} - 1) = 2^{k+2} - 1$. İspat tamamlandı.