Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Nisan 2009

Soru:

$x + y + z = 1$ koşulu sağlıyan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{x(y+z)}{4-9yz} + \frac{y(z+x)}{4-9zx} + \frac{z(x+y)}{4-9xy} \geq 6xyz$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Eşitsizliğin her iki tarafını $3xyz$ pozitif ifadesiyle bölelim:

$$\frac{y+z}{3yz(4-9yz)} + \frac{z+x}{3zx(4-9zx)} + \frac{x+y}{3xy(4-9xy)} \equiv A \geq 2.$$

İlk terimi ele alalım:

$$\frac{y+z}{3yz(4-9yz)} \geq \frac{2\sqrt{yz}}{3yz(4-9yz)} = \frac{2}{3\sqrt{yz}(4-9yz)} = \frac{2}{3\sqrt{yz}(2-3\sqrt{yz})(2+3\sqrt{yz})}.$$

Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden $3\sqrt{yz}(2-3\sqrt{yz}) \leq 1$ ve $2+3\sqrt{yz} \leq 2 + \frac{3(y+z)}{2}$. Sonuç olarak $\frac{y+z}{3yz(4-9yz)} \geq \frac{4}{4+3y+3z}$.

Benzer şekilde $\dfrac{z+x}{3zx(4-9zx)} \geq \dfrac{4}{4+3z+3x}$ ve $\dfrac{x+y}{3xy(4-9xy)} \geq \dfrac{4}{4+3x+3y}$ elde ediyoruz. Şimdi $A \geq \dfrac{4}{4+3y+3z} + \dfrac{4}{4+3z+3x} + \dfrac{4}{4+3x+3y}$ ve Aritmetik- Harmonik ortalama eşitsizliğinden

$A \geq \dfrac{9 \cdot 4}{4+4+4+6(x+y+z)} = 2$. İspat bitti.

Eşitlik durumu: $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.