Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Mart 2009

Soru:

$x_i, i = 1, 2, \ldots, 2009$ gerçel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{2009} \frac{1}{x_i^2+1} = 2008$$

koşulu sağlanıyor. $(i,j) : i,j = 1,2,\ldots,2009;\ i > j$ olmak üzere, $\sum_{(i,j)} x_i x_j$ ifadesinin en büyük değerini bulunuz.

Çözüm:

Cevap : $\dfrac{2009}{2}$.

$$\sum_{i=1}^{2009} \frac{x_i^2}{x_i^2+1} = \sum_{i=1}^{2009}(1 - \frac{1}{x_i^2+1}) = 2009 - 2008 = 1.$$

Cauchy- Schwarz eşitsizliğinden

$$\Big(\sum_{i=1}^{2009} \frac{x_i^2}{x_i^2+1}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2009}(x_i^2+1)\Big) \geq \Big(\sum_{i=1}^{2009} \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+1}} \cdot \sqrt{x_i^2+1}\,\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{2009} x_i\Big)^2$$

elde ediyoruz. O zaman $\sum_{i=1}^{2009}(x_i^2+1) \geq \left(\sum_{i=1}^{2009} x_i\right)^2$ veya $\displaystyle\sum_{(i,j)} x_i x_j \leq \frac{2009}{2}$.

$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2009} = \sqrt{\dfrac{1}{2008}}$ ise eşitlik durumu elde ediliyor.