Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Ocak 2009

Soru:

$f : \mathbb{Z}^{+} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu,

1. $f(0,0) = f(0,1) = 1$,
2. her $k \notin \{0,1\}$ için $f(0,k) = 0$,
3. her $n \geq 1$ ve k için $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-1,k-2n)$

koşullarını sağlıyor.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\binom{2009}{2}} f(2008,k)$ toplamını bulunuz.

Çözüm:

A. $k < 0$ veya $k > n^2+n+1$ ise, tüm $n \geq 0$ değerleri için $f(n,k) = 0$ olduğunu gösterelim. Tümevarım kullanıyoruz:

1. $n = 0:$ $f(0,k) = 0$ if $k < 0$ or $k > 0^2+0+1 = 1$.

2. $k < 0$ veya $k > (n-1)^2+n-1+1 = n^2-n+1$ ise $f(n-1,k) = 0$ olduğunu varsayalım. $k < 0$ ise, $f(n,k) = f(n-1,k)+f(n-1,k-2n) = 0+0 = 0$. $k > n^2+n+1$ ise, $k-2n > n^2-n+1$ ve $f(n,k) = f(n-1,k)+f(n-1,k-2n) = 0+0 = 0$.

B. Tüm $n \geq 0$ ve k değerleri için $f(n,k) = f(n, n^2+n+1-k)$ olduğunu gösterelim. Tümevarım kullanıyoruz:

1. $n = 0:$ $f(0,k) = f(0, 1-k)$.

2. $f(n-1,k) = f(n-1, n^2-n+1-k)$ olduğunu varsayalım. O zaman $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-1,k-2n) = f(n-1, n^2-n+1-k) + f(n-1, n^2+n+1-k) = f(n-1, n^2+n+1-k-2n) + f(n-1, n^2+n+1-k) = f(n, n^2+n+1-k)$.

C. $\sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n,k) = 2^{n+1}$ olduğunu gösterelim. Tümevarım kullanıyoruz:

1. $n = 0:$ $f(0,0) + f(0,1) = 2^{0+1}$.

2. $\sum_{k=0}^{n^2-n+1} f(n-1,k) = 2^n$ olduğunu varsayalım. O zaman $\sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n,k) = \sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n-1,k) + \sum_{k=0}^{n^2+n+1} f(n-1,k-2n) = (A,B) \sum_{k=0}^{n^2-n+1} f(n-1,k) + \sum_{m=0}^{n^2-n+1} f(n-1,m) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Son olarak, B ve C den, $\sum_{k=0}^{\frac{n^2+n}{2}} f(2008,k) = 2^{n+1}/2 = 2^n$.
Demek ki, $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} f(2008,k) = 2^{n-1}$. Cevap: 2^{2008}.