Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Aralık 2008

Soru:

$\dfrac{7^{p-1}-1}{p}$ ifadesinin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

Çözüm:

$p=2$ çözüm değil: $\dfrac{7^{2-1}-1}{2}=3$.
$p=3$ çözümdür: $\dfrac{7^{3-1}-1}{3}=4^2$.
$p>3$ olsun. Önce $p=6k+1$ olduğunu gösterelim: $pa^2=7^{p-1}-1=(7^2-1)(7^{p-3}+7^{p-5}+\cdots+1)$ ve $7^2-1=3\cdot 4^2$ olduğundan $7^{p-3}+7^{p-5}+\cdots+1$ ifadesi 3 ile bölünüyor ve sonuç olarak $p=6k+1$. Buradan $7^{6k}-1=pa^2$ elde ediyoruz. $7^{6k}-1=(7^{3k}-1)(7^{3k}+1)$ ve $ebob(7^{3k}-1,7^{3k}+1)=2$ olduğundan $(7^{3k}-1)(7^{3k}+1)$ çarpanlarının biri $2b^2$ diğeri ise $2pc^2$ olma zorundadır. $2b^2=-1(mod 7)$ denkleminin tam çözümü yoktur (2 mod7 de kuadratik kalandır). Dolayısıyla, $7^{3k}-1$ ifadesi $2b^2$ e eşit olamaz. O zaman

$$7^{3k}+1=2b^2.$$

$7^{3k}+1$ ifadesini çarpanlarına ayıralım: $7^{3k}+1=(7^k+1)(7^{2k}-7^k+1)$. İki çarpan aralarında asaldır: $ebob(7^k+1,7^{2k}-7^k+1)=ebob(7^k+1,7^{2k}-7^k+1-(7^k+1)(7^k-2))=ebob(7^k+1,3)=1$. 7^k+1 çifttir, dolayısıyla $7^{2k}-7^k+1$ tam karedir, bu da $(7^k-1)^2<7^{2k}-7^k+1<(7^k)^2$ eşitsizlikleri ile çelişiyor.

Tek çözüm $p=3$.