



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Kasım 2008

Soru:

$\{a_1, a_2, \dots\}$ tam sayılar dizisinde her $n > 2008$ için a_n terimi, $a_i + i \geq n$ koşulunu sağlayan $1 \leq i \leq n - 1$ indislerinin sayısına eşitse, bu diziye *beyaz* dizi diyelim. $\{a_1, a_2, \dots\}$ dizisinde sonsuz j için $a_j = L$ ise, L sayısına dizinin *önemli* terimi diyelim. Bir *beyaz* dizinin en fazla kaç *önemli* terimi olabilir?

Çözüm:

$K = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{2008}, 2008\}$ olsun. n nin tüm değerleri için $a_n \leq K$ olduğunu gösterelim:

1. $1 \leq n \leq 2009$ ise $a_n = \sum_{i:1 \leq i \leq n-1, a_i+i \geq n} 1 \leq \sum_{i:1 \leq i \leq 2008} 1 \leq 2008$.

2. $1 \leq n \leq k$ değerleri için $a_n \leq K$ olsun. O zaman

$$a_{k+1} = \sum_{i:1 \leq i \leq k, a_i+i \geq k+1} 1 \leq \sum_{i:1 \leq i \leq k, i \geq k+1-K} 1 \leq k - (k+1-K) + 1 = K.$$

a_n terimi, sadece a_n den önce gelen $a_{n-K}, a_{n-K+1}, a_{n-2}, a_{n-1}$ terimlerine bağlıdır: $a_{n-j} + n - j \geq n$ ise $j \leq K$.

Dizimizin sonlu sayıda K ardışık terimden oluşan terim grubu vardır.

O zaman herhangi *beyaz* dizi bir l teriminden itibaren periyodik dizi oluyor ve sonuç olarak her dizinin en az bir tane *önemli* elemanı vardır. M , dizimizin en büyük *önemli* elemanı olsun: $M = \max\{a_i, i > l\}$.

Bundan sonra dizimizin sadece indisleri l den büyük olan elemanlarını inceleyeceğiz. Dizimizde $a_i = M$ ise $a_{i-M} = M$ olma zorundadır.

Tüm $i > l$ için a_i nin M ve $M - 1$ dışında değer almadığını ispatlayalım. Bazı terimlerin $M - 1$ den küçük olduğunu farzedelim. $k - n$ nin en küçük olması koşuluyla $a_{n+M} = M, a_n = M$ ve $a_k < M - 1$ olacak şekilde n ve $k > n$ indislerini seçelim. O zaman $a_{k-1} < M$ oluyor ve $a_k < M - 1$ ve $a_{k-1} < M$ olduğundan $a_{k+M-1} < M - 1$ elde ediyoruz ve bu da $k - n$ nin en küçük olması ile çelişiyor: $k + M - 1$ ve $n + M$ indislerinin farkı $k - n - 1$ dir fakat $a_{n+M} = M$ ve $a_{k+M-1} < M - 1$.

İlk terimleri $a_1 = a_2 = \dots = a_{2006} = 0, a_{2007} = 2, a_{2008} = 1$ olan *beyaz* dizinin *önemli* elemanları 1 ve 2 dir.