Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2008

Soru:

$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ denkleminin bütün köklerinin pozitif gerçel sayılar olmasını sağlayan a, b, c gerçel sayıları için

$$\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$$

ifadesinin en küçük değerini bulunuz.

Çözüm:

İfadesinin en küçük değerinin $\frac{1}{3}$ olduğunu gösterelim. $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ denkleminin kökleri $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ olsun. Vieta teoremine göre

$$x_1 + x_2 + x_3 = a, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b, \quad x_1x_2x_3 = c.$$

Buradan

$$A = \frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$$

$$= \frac{(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)}{(x_1+1)(x_2+1)+(x_2+1)(x_3+1)+(x_1+1)(x_3+1)} - \frac{x_1x_2x_3}{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}} - \frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}} = \frac{\frac{1}{x_1(x_1+1)}+\frac{1}{x_2(x_2+1)}+\frac{1}{x_3(x_3+1)}}{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}\right)}$$

Genelliği bozmadan $0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3$ kabul edelim.

$\frac{1}{x_1} \geq \frac{1}{x_2} \geq \frac{1}{x_3} > 0$ ve $\frac{1}{x_1+1} \geq \frac{1}{x_2+1} \geq \frac{1}{x_3+1} > 0$

olduğu açıktır. Chebyshev eşitsizliğinden

$$(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}) \leq \frac{1}{3}(\frac{1}{x_1(x_1+1)}+\frac{1}{x_2(x_2+1)}+\frac{1}{x_3(x_3+1)})$$

elde ederiz. Demek ki $A \geq 3$. A en küçük değeri olan $1/3$ ü $x_1 = x_2 = x_3 = t > 0$ ($a = 3t$, $b = 3t^2$, $c = t^3$) durumunda alıyor.