Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Nisan 2008

Soru:

$\{x_n\}$ dizisi, $x_1 = a$, $x_2 = b$ ve her $n \geq 2$ tamsayısı için $x_n = 2008x_{n-1} - x_{n-2}$ bağıntıları aracılığıyla tanımlanıyor.

$$1 + 2006x_n x_{n+1}$$

ifadesini tüm $n \geq 1$ tamsayıları için tam kare yapan a ve b pozitif tamsayılarının bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$a = 1$ ve $b = 2008$ alırsak, $1 + 2006x_n x_{n+1}$ ifadesinin tüm $n \geq 1$ tamsayıları için tam kare olacağını ispatlayalım.
İlk olarak tüm $n \geq 1$ değerleri için

$$x_n^2 + x_{n+1}^2 - 1 = 2008x_n x_{n+1}. \tag{1}$$

olduğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim:

1. $n = 1 : 1^1 + 2008^2 - 1 = 2008 \cdot 1 \cdot 2008.$

2. (1), $n = k$ için doğru olsun : $x_k^2 + x_{k+1}^2 - 1 = 2008x_k x_{k+1} = x_k \cdot 2008x_{k+1} = x_k \cdot (x_k + x_{k+2}) = x_k^2 + x_k x_{k+2}$.

Buradan $x_{k+1}^2 - 1 = x_k x_{k+2} = (2008x_{k+1} - x_{k+2})x_{k+2} = 2008x_{k+1}x_{k+2} - x_{k+2}^2$ elde ediyoruz ve $x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 - 1 = 2008x_{k+1}x_{k+2}$ olduğundan (1) in $n = k+1$ için de doğru olduğu görülür.

Son olarak $1 + 2006x_n x_{n+1} = 1 + 2008x_n x_{n+1} - 2x_n x_{n+1} = x_n^2 + x_{n+1}^2 - 2x_n x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n)^2$. İspat tamamlanmıştır.