



Bilkent Üniversitesi  
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2008

**Soru:**

$T$ , doğal sayılar kümesinin bir altkümesi olsun. Herhangi  $a, b \in T$  için  $a^2 - ab + b^2$  ifadesi  $a^2b^2$  ifadesini bölüyorsa,  $T$  kümesinin sonlu küme olduğunu ispatlayın.

**Çözüm:**

$d$ ,  $a$  ve  $b$  sayılarının en büyük ortak böleni olsun:  $d = (a, b)$  veya  $a = da_1$ ,  $b = db_1$ ,  $(a_1, b_1) = 1$ .  $d^2(a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2)$  ifadesi  $d^4a_1^2b_1^2$  yi böldüğünden  $a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2$  ifadesi de  $d^2a_1^2b_1^2$  yi bölüyor.  $(a_1, b_1) = 1$  olduğundan  $(a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2, a_1b_1) = 1$ . O zaman  $a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2$  ifadesi  $d^2$  yi bölüyor veya  $a^2 - ab + b^2$  ifadesi  $d^4$  ü bölüyor.  $d \leq a$  olduğundan  $a^2 - ab + b^2 \leq a^4$ . Bir  $a \in T$  alalım.  $a^2 - ab + b^2 \leq a^4$  olduğundan  $b$  sadece sonlu sayıda farklı değer alabilir.