



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Ocak 2007

Soru:

$f(2007) = 2008$ ve her $x, y \in \mathbf{R}$ için

$$f(4xy) = 2y(f(x + y) + f(x - y))$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonlarını bulun.

Çözüm:

Tek çözümün $f(x) = \frac{2008}{2007}x$ olduğunu ispatlayalım.

$y = 0$ alırsak $f(0) = 0$ ve $x = 0$ alırsak $0 = f(y) + f(-y)$ elde ederiz: f tek fonksiyondur. $f(4st) = f(4ts)$ olduğundan
 $2t(f(s + t) + f(s - t)) = 2s(f(s + t) - f(s - t))$ veya

$$(s - t)f(s + t) = (s + t)f(s - t).$$

$t = 2007 - s$ alalım, $f(2007) = 2008$ olduğundan:

$$(2s - 2007)2008 = 2007f(2s - 2007).$$

$2s - 2007 = x$ olsun: $f(x) = \frac{2008}{2007}x$. Direkt kontrol $f(x) = \frac{2008}{2007}x$ fonksiyonunun çözüm olduğunu gösterir.