Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Aralık 2006

Soru:
Doğal sayılar dizisi $\{a_n\}$ her $n \geq 1$ değeri için $a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ koşulunu sağlıyor. a_{2006} sayısının 2006 ile bölünmesini sağlayan en küçük a_1 sayısı kaçtır?

Çözüm: Cevap: 472.

$2006 = 2 \times 17 \times 59$ olduğundan, a_{2006} 2, 17 ve 59 sayılarıyla bölünüyor.

Bir lemma ispatlayalım:

Lemma. $p = 17$ veya $p = 59$ olsun. a tam sayı olmak üzere, $a^2 + a + 1 = 0 \mod (p)$ denkleminin çözümü yoktur.

Ispat a nın alabileceği tüm değerleri denemeyle veya Legendre sembolu kullanarak yapılabilir:

$p = 17$: $a^2 + a - 17a + 1 + 63 = 63 \mod (17)$ veya $(a-8)^2 = 12 \mod (17)$ elde ediyoruz. $(\frac{12}{17}) = (\frac{3}{17})(\frac{4}{17}) = (\frac{3}{17}) = (\frac{17}{3}) = (\frac{2}{3}) = -1$ olduğundan olamaz.

$p = 59$: $a^2 + a + 59a + 1 + 899 = 899 \mod (59)$ or $(a-30)^2 = 14 \mod (59)$ elde ediyoruz. $(\frac{14}{59}) = (\frac{2}{59})(\frac{7}{59}) = (\frac{59}{7}) = (\frac{3}{7}) = -1$ olduğundan olamaz.

1 (2 ile bölünme). $k \geq 3$ ise, $a_k = a_{k-1}^2 + a_{k-1} = a_{k-1}(a_{k-1} + 1)$. a_{2006} her zaman çiftdir.

2 (59 ile bölünme). m, $a_m$nin 59 ile bölünmesini sağlayan en küçük doğal sayı olsun. (a_{2006} 59a bölündüğünden , m sayısı iyi tanımlanmıştır). $m \geq 4$ olsun. O zaman $59|a_m$ ve $59 \not| a_{m-1}$. $a_m = a_{m-1}(a_{m-1}+1)$ olduğundan $59|(a_{m-1}+1)$ veya $a_{m-1} = -1 \mod (59)$ elde ederiz. $a_{m-1} = a_{m-2}^2 + a_{m-2}$ ve $a_{m-1} = -1 \mod (59)$ olduğundan $a_{m-2}^2+a_{m-2}+1 = 0 \mod (59)$ elde ederiz. Lemmaya göre olamaz. Demek ki $m \leq 3$. $m = 3$ olursa, $a_2 = -1 \mod (59)$ ve $a_2 = a_1^2$ ifadelerinden $a_1^2 = -1 \mod (59)$ elde ederiz, $59 = 4 \times 14 + 3$ olduğundan imkansız. Son olarak, $59|a_1^2$ ise $59|a_1$, demek ki $m = 2$ olamaz. a_1 59la bölünme zorunda.

3 (17 ile bölünme). m, $a_m$nin 17 ile bölünmesini sağlayan en küçük doğal sayı olsun. (a_{2006} 17ye bölündüğünden , m sayısı iyi tanımlanmıştır). $m \geq 4$ olsun. O zaman $17|a_m$ ve $17 \not| a_{m-1}$. $a_m = a_{m-1}(a_{m-1}+1)$ olduğundan $17|(a_{m-1}+1)$ veya $a_{m-1} = -1 \mod (59)$ elde ederiz. $a_{m-1} = a_{m-2}^2 + a_{m-2}$ ve $a_{m-1} = -1 \mod (17)$ olduğundan $a_{m-2}^2 + a_{m-2} + 1 = 0 \mod (17)$ elde ederiz. Lemmaya göre olamaz. Demek ki $m \leq 3$. Son olarak, $17|a_1^2$ ise $17|a_1$, demek ki $m = 2$ olamaz. $m = 1$ ise, $a_1 \geq 17 \times 59 = 1003$ oluyor. $m = 3$ ise, $a_3 = a_1^2 + a_2^2$ ve $a_2 = -1 \mod (17)$ olduğundan $a_1 = \pm 4 \mod (17)$ oluyor.

$a_1 = 59l$ olduğundan $a_1 = 8l = \pm 4 \mod (17)$ elde ediyoruz. Son denklemin en küçük doğal çözümü $l = 8$ dir. O zaman $a_1 \geq 59 \times 8 = 472$. $a_1 = 472$ olursa a_3 2006 ile bölünüyor. O zaman $n > 3$ değerleri için dizinin tüm terimleri 2006 ile bölünüyor.