



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Nisan 2006

Soru: Tüm m ve n tam sayıları için,

$$f(n) - f(n + f(m)) = m$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm:

A. f fonksiyonu aldığı her değeri bir kes alıyor: $f(n + f(m_1)) = f(n) - m_1$ ve $f(n + f(m_2)) = f(n) - m_2$ olduğundan $f(m_1) = f(m_2)$ ise $m_1 = m_2$.

B. f fonksiyonu tüm $-m$ tam değerleri alıyor: (1) denkleminde $m = 0$ yazarsak $f(n + f(0)) = f(n)$. Dolayısıyla $f(0) = 0$. Yine (1) denkleminde $n = 0$ yazarsak $f(f(m)) = -m$.

C. $f(n + m) = f(n + f(f(-m))) = f(n) - f(f(-m)) = f(n) + f((f(f - m))) = f(n) + f(m)$ olduğundan $f(n) = cn$. $f(f(m)) = -m$ denkleminde $f(n) = cn$ yazarsak: $c^2n = -n$ veya $c^2 = -1$. (1) şartını sağlayan fonksiyon bulunamaz.