Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

Ayın Sorusu

Aralık 2005

Soru: Aşağıdaki eşitsizliğin tüm $b > a$ doğal sayıları için geçerli olduğunu gösteriniz:

$$\frac{ab}{(a,b)} + \frac{(a+1)(b+1)}{(a+1,b+1)} \geq \frac{2ab}{\sqrt{b-a}}.$$

İki doğal sayının, n ve m'nin, en büyük ortak böleni (n,m) ile gösterilmiştir.

Çözüm: *Aritmetik Ortalama - Geometrik Ortalama* eşitsizliğini kullanarak

$$\frac{ab}{(a,b)} + \frac{(a+1)(b+1)}{(a+1,b+1)} \geq 2\sqrt{\frac{a(a+1)b(b+1)}{(a,b)(a+1,b+1)}} > \frac{2ab}{\sqrt{(a,b)(a+1,b+1)}}$$

elde ederiz. Çözümü tamamlamak için

$$a - b \geq (a,b)(a+1,b+1) \tag{1}$$

göstermek yeterli olacaktır. Aslında, (a,b) ve $(a+1,b+1)$'nın her ikisi de $b-a$'yı böler, çünkü iki sayının ortak böleni o sayıların farkını da böler. Diğer taraftan (a,b) ve $(a+1,b+1)$ aralarında asaldır ve bu yüzden $(a,b)(a+1,b+1)$ çarpımı da $b-a$'yı böler. Böylece, (1) ispatlanmış olur.